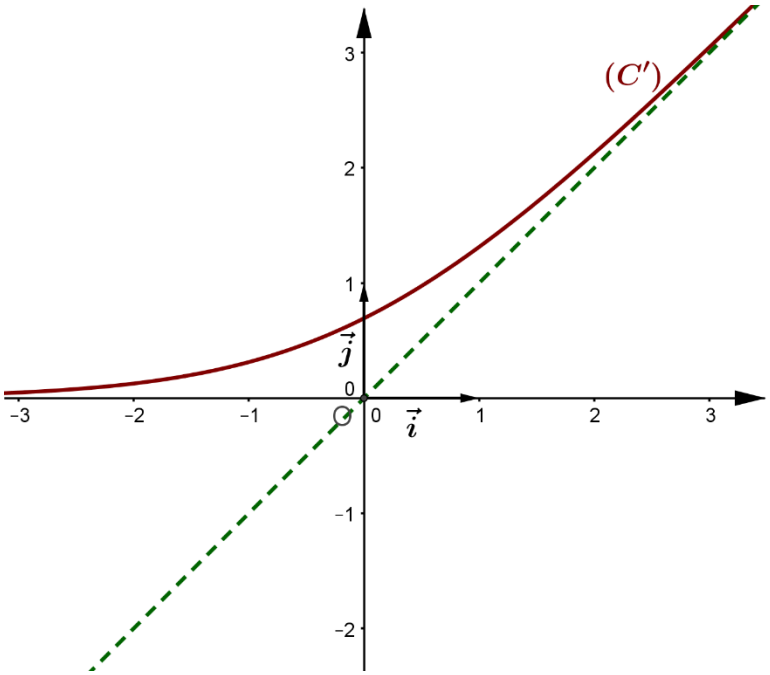
EXERCICE N°4 :	50'	7 points	

Dans la figure, ci-dessous, (C') la courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ de la fonction réciproque f^{-1} d'une fonction f continue et strictement monotone sur $]0;+\infty[$. La courbe (C') admet les droites d'équations : $y=x$ et $y=0$ comme asymptotes et coupe l'axe des ordonnées en $A(0,\ln 2)$.



1°) a) Par lecture graphique déterminer : $f^{-1}(0)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f^{-1}(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x)$ et $\lim\limits_{y\to+\infty}\left[y-f(y)\right]$.

b) En déduire : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

c) Tracer la courbe (C_f) de f dans le même repère $(o,\vec{i},\vec{j})$ que (C').

2°) En réalité on connait que : $f^{-1}(x)=\ln\left(e^{ax}+b\right)$, où a et b sont deux réels strictement positifs.

a) Vérifier que $f^{-1}(x)=ax+\ln\left(1+b\,e^{-ax}\right)$ pour tout réel x strictement positifs.

b) Montrer que : $a=b=1$.

c) En déduire que pour tout réel x strictement positif, $f(x)=\ln\left(e^x-1\right)$.

3°) On considère la suite (I_n) telle que : pour tout $n\in IN^*$, $I_n=\int_1^n e^{-x}\ln\left(e^x-1\right)dx$.

a) Montrer que la suite (I_n) est croissante.

b) A l'aide d'une intégration par parties calculer $\int_1^n xe^{-x}dx$ En déduire que pour tout $n\in IN^*$:

$$0\le I_n\le -(n+1)\,e^{-n}+\frac{2}{e}.$$

c) Montrer que la suite (I_n) est convergente.

4°) a) Vérifier que pour tout $x\neq 0$: $\dfrac{1}{e^x-1}=\dfrac{e^x}{e^x-1}-1$.

b) Montrer en s'aidant d'une intégration par partie que : pour tout $n\in IN^*$;

$$I_n=\left(1-\frac{1}{e^n}\right)\ln\left(e^n-1\right)-n+\left(\frac{1}{e}-1\right)\ln(e-1)+1$$

c) En déduire la limite de I_n , lorsque n tend vers $+\infty$.

Qarray.tn - Agra Blech - Qarray.tn